IV appello 12/9/18 — Geometria e Algebra Lineare per Ingegneria Elettronica e di Internet
Prof. F. Bracci — A.A. 2017-18

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3.

(a) Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ generano V, allora è possibile estrarre una base di V da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
(b) Ogni insieme composto da 3 vettori di V forma una base di V.
(c) Se $v_1, v_2 \in V$ sono linearmente indipendenti allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{v_1 + \lambda v_2, v_2\}$ sono linearmente indipendenti.
(d) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V allora ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Q2) Sia A_α la seguente matrice al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Esistono valori di α per cui la matrice A_α è invertibile.
(b) Gli autovalori di A_α non dipendono da α.
(c) Non esistono valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_α sia diagonalizzabile.
(d) Per $\alpha = 1$ la matrice A_α ha un solo autovalore di molteplicità geometrica 4.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione $\dim V = n, \dim W = m$. Sia $L : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Se L è iniettivo allora $n = m$.
(b) Se $\dim \ker L > 0$ allora $m \geq n$.
(c) Se $\mathsf{Im}\, L$ ha dimensione m allora $n \geq m$.
(d) Se L è suriettivo allora $n = m$ se e solo se $\dim \ker L = 0$.

Q4) Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione 2 e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $\langle v, w\rangle = 0$ e $\langle u, w\rangle = 0$ allora u, v sono linearmente dipendenti.
(b) Se u, v sono linearmente indipendenti allora $\langle u, v\rangle = 0$
(c) Se $\langle u + v, w\rangle = 0$ allora $\{u, w\}$ oppure $\{v, w\}$ sono linearmente indipendenti.
(d) Se $\{u, v\}$ è una base di V allora $\langle u, w\rangle = 0$ oppure $\langle v, w\rangle = 0$.

Q5) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sia A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a & b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Se $a \neq bc$ e $b \neq 0$ il rango di A è 3.
(b) Se per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ il sistema $Ax = v$ ha soluzione, per $x \in \mathbb{R}^4$, allora $b \neq 0$.
(c) Il rango di A è sempre 2.
(d) Se $a \neq bc$ e $b \neq 0$ il sistema $Ax = v$, $x \in \mathbb{R}^4$ ha una unica soluzione per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

Q6) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z).

(a) La retta $x - y = 2, x + z = 1$ è contenuta nel piano $2x - y + z = 3$.
(b) L'equazione cartesiana della retta $x = 4, y = 4 + \lambda, z = -2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ è data da $y - x = 0, z = -2$.
(c) Date due rette r, s che non si intersecano, esiste un unico piano che le contiene entrambe.
(d) Il piano $x - y + 2z = 1$ è parallelo alla retta $x + y = 0, -2x + z = 3$.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ una affinità.

(a) Se A è un triangolo di area 2, allora $T(A)$ è un triangolo di area 2.
(b) Sia r la retta $x + y = 0$. Allora $T(r)$ è sempre una retta che contiene $(0, 0)$.
(c) Siano $A = (1, -1)$ e $B = (-1, 1)$. Se T è una isometria, la distanza tra $T(A)$ e $T(B)$ è $2\sqrt{2}$.
(d) Siano $r : x + y = 0$ e $s : x - 2y = 0$. Esiste una isometria T tale che $T(r)$ ha equazione $x = 0$ e $T(s)$ ha equazione $y = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C}_\alpha : x^2 + 2\alpha xy - y^2 + \alpha^2 = 0$ una famiglia di coniche al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Per $\alpha = 0$ la conica è affinemente equivalente ad una parabola.
(b) Per $\alpha = -\log(2)\sqrt{7}$ la conica è affinemente equivalente ad una iperbole.
(c) Per $\alpha > 0$ la conica è affinemente equivalente ad una ellisse.
(d) Per ogni valore di α la conica non è degenere.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Sia $V = Pol_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 con coefficienti reali. Sia $L : V \to V$ l'applicazione data da

$$L(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2 x^2.$$

(1) Verificare che L è lineare e determinare la matrice associata a L nella base $\{1, x, x^2\}$ di V (in partenza e in arrivo).
(2) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di L e trovare una base dell'immagine di L.
(3) Trovare gli autovalori e gli autospazi di L e dire se L è diagonalizzabile.
(4) Trovare la matrice associata a L nella base $\{1, 2 - x, 1 + x - x^2\}$ (in partenza e in arrivo).

Soluzioni:

Q1: a, c, d.
Q2: a, c.
Q3: c, d.
Q4: a.
Q5: a, b.
Q6: a.
Q7: c.
Q8: b.

Parte II:

(1) Per verificare che L è lineare occorre provare che
  (a) $L(p(x) + q(x)) = L(p(x)) + L(q(x))$ per ogni $p(x), q(x) \in V$,
  (b) $L(\lambda p(x)) = \lambda L(p(x))$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in V$.

  Per verificare (a), scriviamo $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. Dunque

$$\begin{aligned} L(p(x) + q(x)) &= L((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\ &= (a_0 + b_0 - (a_1 + b_1) - 2(a_2 + b_2)) + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)x + 2(a_2 + b_2)x^2 \\ &= (a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2 x^2 + (b_0 - b_1 - 2b_2) + (b_1 + b_2)x + 2b_2 x^2 = L(p(x)) + L(q(x)). \end{aligned}$$

  Per verificare (b),

$$\begin{aligned} L(\lambda p(x)) &= L(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) = (\lambda a_0 - \lambda a_1 - 2\lambda a_2) + (\lambda a_1 + \lambda a_2)x + 2\lambda a_2 x^2 \\ &= \lambda[(a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2 x^2] = \lambda L(p(x)). \end{aligned}$$

  Fissiamo ora la base $\{1, x, x^2\}$ di V. La matrice associata a L in tale base (in partenza e in arrivo) si ottiene tramite $L(1) = 1$, $L(x) = -1 + x$, $L(x^2) = -2 + x + x^2$. Dunque la matrice associata è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Essendo A una matrice triangolare superiore, gli elementi della diagonale principale sono gli autovalori di L. Essendo tutti diversi da 0, ne segue che il nucleo di L ha dimensione 0. L'immagine di L ha dunque dimensione 3 e coincide con V. Pertanto qualunque base di V è una base dell'immagine di L.

(3) Dal punto precedente segue che gli autovalori di L sono $1, 2$, con 1 che ha molteplicità algebrica 2 e 2 che ha molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Per calcolare V_1, l'autospazio relativo a 1, occorre risolvere il sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

La soluzione è $a_1 = a_2 = 0$. Pertanto V_1 ha dimensione 1 ed è generato dal polinomio $p(x) = 1$. Dunque la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è 2 e la sua molteplicità geometrica è 1, ne segue che L non è diagonalizzabile.

Per calcolare l'autospazio V_2 occorre risolvere il sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

La soluzione è $a_0 = -3a_2$, $a_1 = a_2$. Una base di V_2 è dunque data da $-3 + x + x^2$.

(4) La matrice di cambiamento di base dalla base $\{1, 2 - x, 1 + x - x^2\}$ alla base $\{1, x, x^2\}$ è

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice associata a L nella base $\{1, 2 - x, 1 + x - x^2\}$ è data da $C^{-1}AC$, ovvero

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$